

JOANNA KALISZUK\*

**WPLYW ZMIANY WARTOŚCI WSKAŹNIKA  
NIEZAWODNOŚCI  $\beta$ , WYZNACZANEGO METODĄ FORM  
NA OCENĘ KLASY NIEZAWODNOŚCI RC  
ANALIZOWANEJ KONSTRUKCJI**

*Streszczenie*

*W artykule przedstawiono zagadnienie niezmienniczości wyników analizy niezawodności konstrukcji realizowanej metodą FORM za pomocą symulacji HMC. Problem zilustrowano na przykładzie analizy dźwigara stalowego, dla którego obliczono wartości wskaźnika niezawodności  $\beta(g1)$  i  $\beta(g2)$ , odpowiednio dla dwóch tożsamyh funkcji stanu granicznego  $g1$  i  $g2$ . Pokazano jak otrzymane różnice wyników wpływają na ocenę klasy niezawodności RC analizowanej konstrukcji.*

Słowa kluczowe: wskaźnik niezawodności  $\beta$ , klasa niezawodności RC, metoda FORM (first order reliability method), hybrydowa metoda symulacji Monte Carlo (HMC), metoda elementów skończonych (MES), sztuczne sieci neuronowe (SSN)

**WSTĘP**

Wskaźnik niezawodności  $\beta$  jest umowną miarą niezawodności konstrukcji, przyjętą przez Eurokod 1990 (EC0), powiązaną z prawdopodobieństwem zniszczenia  $P_f$  zależnością (1)

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (1)$$

gdzie:  $\Phi(\cdot)$  jest funkcją dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego.

Prawdopodobieństwo zniszczenia  $P_f$  jest definiowane za pomocą funkcji stanu granicznego  $g(\mathbf{X})$  wzorem (2):

---

\* Uniwersytet Zielonogórski, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska, Instytut Budownictwa

$$P_f = \text{Prob}(g(\underline{\mathbf{X}}) \leq 0) \quad (2)$$

przy czym ogólną postać funkcji  $g(\underline{\mathbf{X}})$  określa zależność (3):

$$g(\underline{\mathbf{X}}) = R - E \quad (3)$$

gdzie:

$\underline{\mathbf{X}}$  - wektor zmiennych podstawowych konstrukcji (wektor stanu konstrukcji),  
 $R$  - losowa nośność konstrukcji,  
 $E$  - losowy efekt oddziaływań.

Jeśli tak zdefiniowana funkcja stanu granicznego przyjmuje wartości  $g > 0$  konstrukcja uważana jest za bezpieczną, a wartości  $g \leq 0$  są utożsamiane z jej niebezpiecznymi stanami.

W przypadku, gdy funkcja stanu granicznego  $g$  jest zmienną losową o rozkładzie normalnym, wskaźnik niezawodności  $\beta$  wyznaczyć można według wzoru (4):

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} \quad (4)$$

w którym:

$\mu_g$  - wartość średnia,

$\sigma_g$  - odchylenie standardowe zmiennej losowej  $g$ .

Eurokod 1990 aprobuje wyznaczanie wskaźnika niezawodności  $\beta$  wzorem (4) również wtedy, gdy funkcja stanu granicznego nie ma rozkładu normalnego. Podejście takie, nazywane jest metodą FORM (first order reliability method), por. [Melchers 1987]. Obliczony metodą FORM wskaźnik  $\beta$  jest umowną miarą niezawodności  $P_s = 1 - P_f$ .

Wskaźnik niezawodności  $\beta$  jest wykorzystywany przez EC0 w procedurach odnoszących się do zarządzania niezawodnością obiektów budowlanych, w których podstawę różnicowania niezawodności stanowią tzw. klasy niezawodności (RC). Eurokod 1990 określa trzy klasy niezawodności: RC1, RC2, RC3, powiązane z trzema klasami konsekwencji: CC1, CC2 i CC3.

Klasy konsekwencji zostały ustanowione w [PN-EN 1990] odpowiednio do konsekwencji zniszczenia konstrukcji lub jej elementu. Eurokod 1990 ustala dla poszczególnych klas niezawodności RC, zalecane minimalne wartości wskaźnika niezawodności  $\beta$ , odnoszące się do stanów granicznych nośności. Wartości te zmieniają się w granicach od  $\beta = 4,2$  dla RC1 do  $5,2$  dla RC3 przy jednorocznym okresie odniesienia oraz od  $\beta = 3,3$  dla RC1 do  $4,3$  dla RC3 gdy okresem odnie-

sienia jest 50 lat. Wymienione, graniczne wartości wskaźnika  $\beta$  odpowiadają następującym wartościom prawdopodobieństwa zniszczenia konstrukcji  $P_f$ :  $P_f(\beta = 5,2) = 10^{-7}$ ,  $P_f(\beta = 3,3) = 4,83 \cdot 10^{-4}$ ). Wartości te są bardzo małe i odnoszą się do lewostronnej, końcowej części wykresu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $g$ . Z tego względu, a także ze względu na przyjęty w EC0, wąski przedział zmienności wskaźnika  $\beta$ , metody stosowane do obliczania wartości  $\beta$  powinny cechować się niezmienniczością.

W przypadku analizy niezawodności złożonych konstrukcji, efektywną grupę metod, wyznaczania wartości  $\beta$ , stanowią metody symulacyjne a w tym Hybrydowa Metoda Monte Carlo (HMC), por. [Papadrakakis 1996]. Metoda HMC polega na wykorzystaniu sztucznych sieci neuronowych (SSN) do generowania pseudolosowych prób niezbędnych do przeprowadzenia symulacji. W przypadku analizy niezawodności konstrukcji, sztuczne sieci neuronowe są uczone i testowane za pomocą wzorców obliczonych wcześniej metodą elementów skończonych (MES).

Analiza niezawodności konstrukcji metodą HMC może być realizowana według jednej, ze sprawdzanych w pracy procedur [Kaliszuk 2016], którymi są:

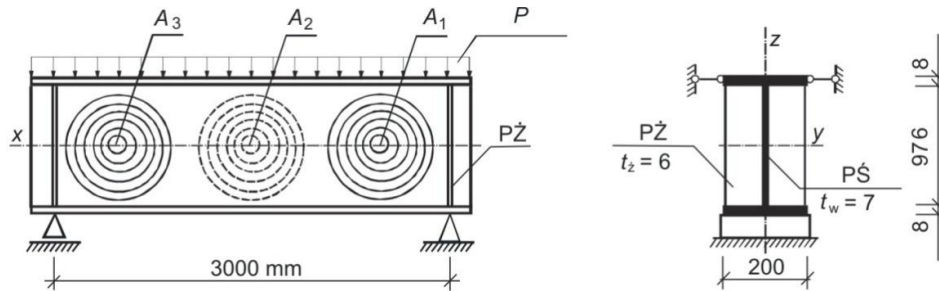
- procedura ECD (Empirical Cumulative Distribution) wykorzystująca empiryczną dystrybuantę funkcji stanu granicznego  $g(\mathbf{X})$ , charakteryzująca się niezmienniczością otrzymywanych wyników;
- procedura ESM (Empirical Second Moment), odpowiadająca dopuszczalnej przez EC0 metodzie niezawodności FORM, gdzie wykorzystywane są aproksymowane wartości dwóch pierwszych momentów rozkładu prawdopodobieństwa przyjętej funkcji stanu granicznego  $g(\mathbf{X})$ , którymi są wartość średnia  $\mu_g$  i odchylenie standardowe  $\sigma_g$ . Wyniki analiz niezawodności realizowanych wg tej procedury, dla różnych ale tożsamyh postaci funkcji stanu granicznego  $g(\mathbf{X})$ , mogą się różnić.

Konsekwencje pojawiających się różnic wyników analizy FORM realizowanej symulacją HMC zilustrowano dalej na przykładzie analizy niezawodności stalowego dźwigara.

## OPIS ANALIZOWANEJ KONSTRUKCJI

Do analizy przyjęto blachownicowy dźwigar stalowy o przekroju dwuteowym spełniającym warunki klasy 4, ustalone w [PN-EN 3-1-1]. Środek dźwigara, poza podporami, jest nieuzębrowany. Pas górny (ściskany) jest punktowo zabezpieczony przed zwichrzeniem. Przyjęto dla konstrukcji model belki swobodnie podpartej, równomiernie obciążonej, wykonanej ze stali gatunku S235 o ustalonych parametrach wytrzymałościowych: granicy plastyczności  $f_y = 235$  MPa, module sprężystości podłużnej  $E = 205$  GPa i współczynnika Poissona  $\nu = 0,3$ . Schemat blachownicy przedstawionym na rys. 1.

Założono, że środnik dźwigara ma niedokładności wykonawcze w postaci losowych wklęsnięć i wypukleń pojawiających się niezależnie w trzech wydzielonych polach. Przyjęto, że imperfekcje mają postać gładkich powierzchni opisanych kosinusowymi półfalami, zgodnie ze wzorem (5).



Rys. 1. Schemat analizowanego dźwigara  
Fig. 1. Scheme of the analyzed girder

Oznaczenia na rys. 1:  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  – losowe amplitudy wstępnych deformacji środnika, PŻ – ścianka żebra podporowego, PŚ – ścianka środnika,  $t_w$  – grubość środnika,  $P$  – obciążenie dźwigara (kN/m).

$$w(x_1, z_1) = A_k \cdot \cos \frac{\pi x_1}{L_x} \cdot \cos \frac{\pi z_1}{B_z}, \quad (5)$$

w którym:

$A_k$  – amplitudy deformacji dla  $k = 1, 2, 3$ , przyjęte jako niezależne, normalne zmienne losowe.

## PRZYGOTOWANIE SZTUCZNYCH SIECI NEURONOWYCH

Proces projektowania SSN podzielono na dwa etapy:

- obliczanie wzorców uczących i testujących za pomocą metody elementów skończonych (MES),
- uczenie, testowanie i wybór sztucznych sieci neuronowych do analizy niezawodności.

### 1. Obliczanie wzorców uczących i testujących

Wzorce obliczano za pomocą programu MES, COSMOS/M. Wygenerowano  $L = 125$  wzorców uczących, równomiernie pokrywających przestrzeń zmiennych losowych wektora stanu konstrukcji  $\underline{X}$  oraz  $T = 100$  wzorców testujących odpowiadających pseudolosowo wybranym wartościom zmiennych podstawowych.

Przyjęto, że elementami losowego wektora stanu konstrukcji są trzy losowe amplitudy imperfekcji,  $\underline{\mathbf{X}} = \{A_1, A_2, A_3\}$ . Założono, że zmienne  $A_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) są niezależne, mają rozkłady normalne o wartości średniej  $\mu_{A_k} = 0$  mm i odchyleniu standardowym  $\sigma_{A_k} = A_{ult}/2$ , przy czym  $A_{ult} = 7$  mm, przyjęto zgodnie z [PN-B-6200 1996].

Ustalono stały zasięg poszczególnych deformacji  $L_x = B_z = 976$  mm, odpowiednio w kierunku osi  $x_1$  i  $z_1$

Analizy MES realizowano według schematu, przedstawionego wzorem (6)

$$\underline{\mathbf{X}}_p = \{A_{1,p}, A_{2,p}, A_{3,p}\} \xrightarrow{MES} Y_p = \lambda_p^{ult}, \quad (6)$$

w którym:

$\underline{\mathbf{X}}_p$  - wektor stanu  $p$ -tego wzorca,

$\lambda_p^{ult}$  - mnożnik nośności granicznej odpowiadający globalnej utracie stateczności dźwigara dla  $p$ -tego wzorca.

Tak obliczone zbiory  $L$ ,  $T$  wzorców, odpowiednio uczących i testujących posłużyły dalej do projektowania, uczenia i testowania sztucznych sieci neuronowych.

## 2. Przygotowanie sztucznych sieci neuronowych

Zaprojektowano rodzinę jednokierunkowych sieci ze wsteczną propagacją błędów (WPB) o strukturze:  $3 - H - 1$ . Oznacza to, że sieci mają 3. elementowy wektor wejścia  $\mathbf{X} = \{A_1, A_2, A_3\}$ , którego składnikami są amplitudy imperfekcji  $A_k$ , jedną warstwę ukrytą zawierającą  $H$  sigmoidalnych neuronów oraz skalarnie wyjście  $Y = \lambda^{ult}$ . Schemat działania sieci ilustruje wzór (7)

$$\mathbf{X} = \{A_1, A_2, A_3\} \xrightarrow{SSNWPB} Y = \lambda^{ult} \quad (7)$$

Do analizy niezawodności wybrano jedną sieć WPB:  $3 - 8 - 1$ , najlepiej spełniającą założone kryteria jakości, za które przyjęto:

- minimum błędów uczenia i testowania przy ich maksymalnej zbieżności,
- maksimum współczynników korelacji liniowej odnoszących się, odpowiednio do wzorców uczących i testujących.

## ANALIZA NIEZAWODNOŚCI METODĄ HMC

W celu sprawdzenia wrażliwości metody FORM realizowanej hybrydową symulacją MC na postać funkcji stanu granicznego  $g$  obliczono tzw. krzywą niezawodności. Krzywa niezawodności przedstawia zależność wartości wskaźnika  $\beta$  od wartości średniej losowego obciążenia  $\mu_p$  analizowanej konstrukcji.

Obliczenia każdego  $j$  – tego punktu krzywej niezawodności przeprowadzano zgodnie z następującymi założeniami:

- w każdej  $j$ – tej symulacji, obciążenie belki  $P$  jest zmienną losową o rozkładzie normalnym z parametrami: wartością średnią  $\mu_{Pj}$  i odchyleniem standardowym  $\sigma_{Pj} = 0,1\mu_{Pj}$ ,
- zakres zmienności wartości średnich obciążenia ograniczono do przedziału  $\mu_{Pj} = [160; 250]$  kN/m z przyrostem  $\Delta\mu_{Pj} = \mu_{P(j+1)} - \mu_{Pj} = 1$  kN/m,
- amplitudy deformacji  $A_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) są niezależnymi, normalnymi zmiennymi losowymi o wartości średniej  $\mu_{A_k} = 0$  mm i odchyleniu standardowym  $\mu_{A_k} = A_{ult}/2$  przy czym  $A_{ult} = 7$  mm,
- obliczenia przeprowadzono dla dwóch, tożsamyh postaci funkcji stanu granicznego  $g1$  i  $g2$ , zdefiniowanych odpowiednio wzorami (8):

$$g1 = R - S, \quad g2 = R/S - 1 \quad (8)$$

w których:

$R = \underline{P}^{ult}(A_k) = \underline{\lambda}^{ult}(A_k) \cdot P^*$  - losowa nośność graniczna belki odpowiadająca wylosowanym wartościom amplitud imperfekcji środka  $A_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ ;

$P^*$  - ustalone obciążenie odniesienia,

$S = \underline{P}$  - losowe obciążenie belki o ustalonych wartościach parametrów rozkładu  $\mu_{Pj}$  i  $\sigma_{Pj} = 0,1\mu_{Pj}$ .

Dla wygenerowanych w symulacjach HMC prób, obliczano aproksymowane wartości dwóch pierwszych momentów losowej funkcji stanu granicznego  $g(\underline{\mathbf{X}})$ :

- wartości średniej i odchylenia standardowego:

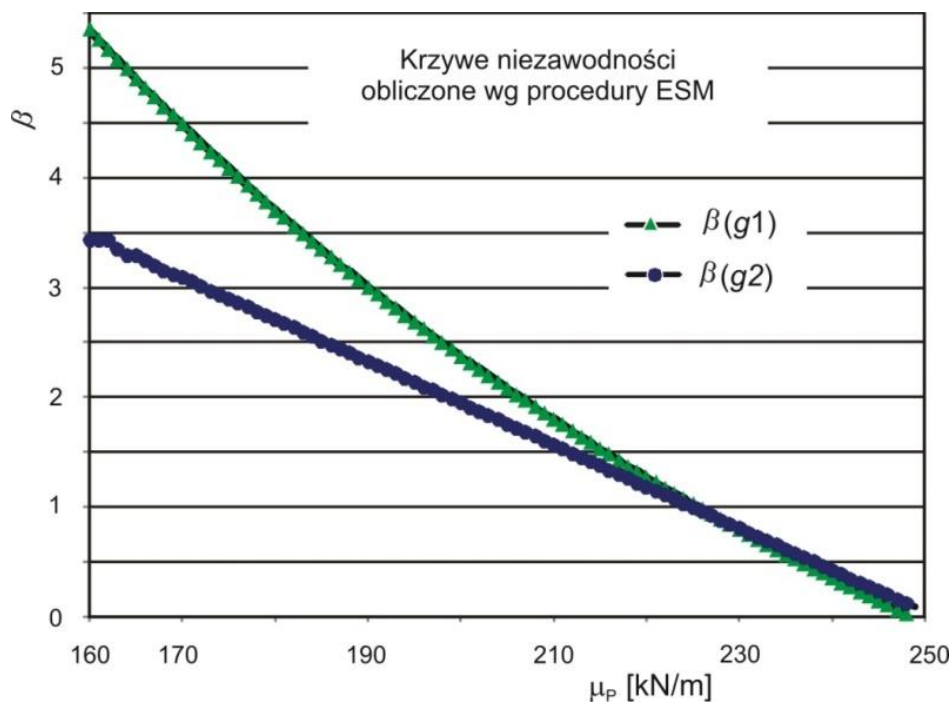
$$\mu_g = \frac{\sum_{i=1}^N g(\underline{\mathbf{X}}_i)}{N}, \quad \sigma_g = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N [g(\underline{\mathbf{X}}_i) - \mu_g]^2}{N-1}} \quad (9)$$

We wzorach (9)  $N = 10^8$  jest liczebnością próby.

Następnie, obliczano dla tej próby wartości indeksu niezawodności  $\beta$  według wzoru (4), odpowiednio dla funkcji  $g1$  i  $g2$ . Otrzymane w ten sposób krzywe niezawodności przedstawiono na rys. 2, a w tab. 1 zestawiono obliczone wartości  $\beta$  odpowiadające wybranym wartościom  $\mu_P$ , gdy funkcja stanu granicznego ma postać odpowiednio  $g1$  i  $g2$ .

Tab. 1. Wartości  $\beta(g1)$ ,  $\beta(g2)$  obliczone metodą FORM i symulacjami HMC  
 Tab. 1. Values of  $\beta(g1)$ ,  $\beta(g2)$  calculated with the FORM and HMC simulations

$\mu_p$ [kN/m]	161	172	178	185	188
$\beta(g1)$	5,26	4,32	3,86	3,34	3,14
$\beta(g2)$	3,43	3,01	2,78	2,51	2,40



Rys.2. Krzywe niezawodności obliczone metodą FORM i symulacjami HMC dla funkcji stanu granicznego:  $g1$  i  $g2$ .

Fig.2. Reliability curves calculated with the FORM and HMC simulations for the limit state functions  $g1$  and  $g2$

### ANALIZA WYNIKÓW I PODSUMOWANIE

Zarówno rys. 2 jak i wartości  $\beta$  zamieszczone w tab. 1 wskazują na znaczną wrażliwość metody FORM na zmianę postaci funkcji stanu granicznego  $g$ .

Rozbieżności wyników są na tyle duże, że mogą prowadzić do niewłaściwej oceny klasy niezawodności analizowanej konstrukcji. Na przykład, dla średniego obciążenia konstrukcji  $\mu_p = 161$  kN/m otrzymano:

- $\beta(g1) = 5,26 > 5,2$  wartość wskaźnika niezawodności dla  $g1$ , spełniająca warunek graniczny klasy niezawodności RC3 przy jednorocznym okresie

odniesienia. Klasa niezawodności RC3 jest wymagana dla konstrukcji o bardzo dużych konsekwencjach zniszczenia, zarówno w odniesieniu do zagrożenia życia ludzkiego jak i konsekwencji ekonomicznych i środowiskowych. Obiektami o takich konsekwencjach zniszczenia są np. budynki użyteczności publicznej.

- $\beta(g2) = 3,43 > 3,3$  wartość wskaźnika niezawodności dla  $g2$ , spełniająca warunek graniczny klasy niezawodności RC1 przy 50-cioletnim okresie odniesienia. Klasa RC1 jest wymagana dla obiektów o nieznacznych konsekwencjach zniszczenia, np. dla budynków rolniczych, w których ludzie zazwyczaj nie przebywają.

Przeprowadzona dyskusja pokazuje jak ważna jest niezmienniczość, stosowanej w analizie niezawodności, metody obliczeniowej. W przypadku realizacji analizy za pomocą hybrydowej symulacji MC, wskazane jest bezpośrednie całkowanie wybranego obszaru rozkładu prawdopodobieństwa funkcji stanu granicznego  $g$ , które odpowiada procedurze ECD opisanej w [Kaliszuk 2016].

#### LITERATURA

1. KALISZUK J.; 2016. Niezmienniczość analizy niezawodności realizowanej hybrydową metodą Monte Carlo. Materiały Budowlane 11, 42-43.
2. MELCHERS R.E.; 1987. Structural Reliability Analysis and Prediction. Southampton: Halsted Press.
3. PAPADRAKAKIS M., PAPADOPOULOS V., LAGAROS N.; 1996. Structural reliability analysis of elastic – plastic structures using neural Network and Monte Carlo simulation. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 136: 145-163.
4. PN-EN 1993-1-1; 2006, Eurokod. Projektowania konstrukcji stalowych. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
5. PN-EN 1990; 2004, Eurokod. Podstawy projektowania konstrukcji.
6. PN-B-06200; 2002, Konstrukcje stalowe budowlane. Warunki wykonania i odbioru. Wymagania podstawowe.

#### **IMPACT OF THE CHANGES IN RELIABILITY INDEX $\beta$ VALUES CALCULATED BY THE FORM METHOD FOR ASSESSMENT OF THE RELIABILITY CLASS RC OF THE ANALYZED STRUCTURES**

##### *S u m m a r y*

*The paper presents the problem of the invariance of structural reliability analysis results which have been obtained by applying the FORM method,*



*realized by means of HMC simulation. The problem was illustrated by the example of a steel girder analysis for which reliability index values  $\beta(g1)$  and  $\beta(g2)$  for identical limit state functions  $g1$  and  $g2$ , respectively, were calculated. The paper also illustrates how the differences in the results obtained affect the evaluation of the reliability class RC of the analyzed structure.*

Key words: Reliability Index  $\beta$ , Reliability Class (RC), First Order Reliability Method (FORM), Hybrid Monte Carlo Method (HMC), Finite Element Method (FEM), Artificial Neural Networks (ANN).