

TOMASZ TELESZEWSKI*

**SYMULACJA KONWEKCJI WYMUSZONEJ W PRZEWODACH
PROSTOOSIOWYCH PRZY PRZEPLYWIE LAMINARNYM
METODĄ ELEMENTÓW BRZEGOWYCH**

Streszczenie

W pracy przedstawiono algorytm symulacji konwekcji wymuszonej MEB przy przepływie laminarnym w przewodach prostoosiowych niezależnie od kształtu poprzecznego przewodu. Weryfikacja algorytmu została wykonana poprzez porównanie rezultatów MEB z rozwiązaniem analitycznym. W publikacji wyznaczono zależność liczby Nusselta od liczby boków w przewodach o przekroju wielokąta foremnego.

Słowa kluczowe: konwekcja wymuszona, przewody prostoosiowe, liczba Nusselta, metoda elementów brzegowych (MEB)

WPROWADZENIE

W licznych zagadnieniach cieplno-przepływowych w inżynierii środowiska wykorzystuje się do obliczeń metody numeryczne, związane z przejmowaniem ciepła przy wymuszonym ruchu płynu w przewodach prostoosiowych [Clark 2000, Kakac i Liu 2002]. Rozwiązania analityczne pól temperatur konwekcji wymuszonej w przewodach prostoliniowych znane są tylko dla najprostszych geometrii [Shah i London 1978, Ray i Misra 2010], natomiast w przypadku skomplikowanych kształtów przekrojów przewodów stosuje się najczęściej metody siatkowe np. metoda różnic skończonych [Sadasivam i in. 1999].

Równania różniczkowe opisujące przepływ płynu newtonowskiego i nieściśliwego wynikają z zasady zachowania masy (1), momentu pędu (2) i energii (3) [Batchelor 2000, White 2005]:

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0 \quad (1)$$

* Politechnika Białostocka; Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska;
Katedra Ciepłownictwa

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = -\nabla \bar{\phi} + \mu \nabla^2 \bar{v} \quad ; \quad \bar{\phi} = \nabla p - \rho \bar{g} \quad (2)$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \lambda \nabla^2 T + \mu \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (3)$$

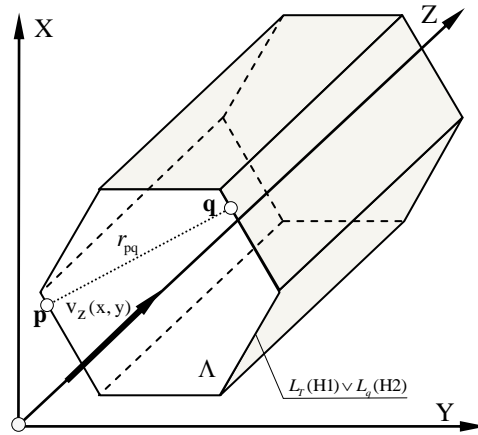
gdzie: v_i oznacza prędkość przepływu, p ciśnienie, g jest to przyśpieszenie ziemskie, ρ jest gęstością cieczy, μ jest współczynnikiem lepkości dynamicznej, C_p jest ciepłem właściwym przy stałym ciśnieniu, λ jest współczynnikiem przewodzenia ciepła, τ_{ij} jest lepkiem tensorem naprężeń, natomiast i, j są to indeksy współrzędnych kartezjańskich.

Zakładając w pełni rozwinięty przepływ laminarny, składowe prędkości wzdłuż osi współrzędnych x i y równe są zero. Równanie (3) ulega uproszczeniu przy założeniu stałego wzdłuż osi przewodzenia, a także pominięciu dyssypacji lepkości. W wyniku czego równania (1-3) przybierają postać (rys.1):

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$\lambda \nabla^2 T = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial z} v_z \quad (6)$$



Rys. 1. Szkic obrazujący zagadnienia brzegowe w przepływach przez kanały prostoliniowe
Fig. 1. Sketch to consideration of boundary conditions for duct flow

Następnie przyjęto dekompozycje prędkości na składową przepływu niezakłóconego v_∞ oraz przepływu wzbudzonego v_w ściankami przewodu, w wyniku czego równanie (5) zostanie zredukowane do równania Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 v_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_w}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad v_w(\mathbf{q}) = -v_\infty \quad ; \quad \mathbf{q} \in L \quad (7)$$

gdzie:

$$v_\infty = \frac{1}{4} \wp(x_q^2 + y_q^2) \quad ; \quad \wp = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} < 0 \quad (7a)$$

Ostatecznie prędkość w przekroju kanału wyznacza się z zależności:

$$v_z = v_\infty + v_w \quad (8)$$

Schemat programu obliczeniowego składa się z dwóch części. W pierwszej części rozwiązywane jest równanie (7) i zależność (8), z której wyznacza się pole prędkości v_z w obszarze Λ , jest ono warunkiem dla równania (6). Przykłady zastosowania pierwszej części algorytmu MEB do określania wielkości jednoczłonowych, które opisują izotermiczne przepływy laminarne w przewodach prostoosiowych zostały przedstawione w pracach [Teleszewski i Sorko 2012, Teleszewski 2012]. W drugiej części programu z równania (6) wyznaczane jest pole temperatury na podstawie której wyznaczana jest liczba Nusselta Nu. W pracy przyjęto dwa warunki na obwodzie przewodu: warunek Dirichleta w postaci zadanej temperatury na konturze przekroju przewodu, oznaczony jako H1 i warunek Neumanna, czyli zadany stały strumień, oznaczony jako H2.

W celu wyznaczenia pól temperatur konwekcji wymuszonej w przepływie laminarnym przez przewody prostoosiowe napisano autorski program obliczeniowy FORCED_CONVECTIONinDUCT w języku Fortran.

BRZEGOWE RÓWNANIA CAŁKOWE OPISUJĄCE KONWEKCJE WYMUSZONĄ W PRZEPŁYWIE LAMINARNYM PRZEZ PRZEWODY PROSTOOSIOWE

Rozwiązaniem równania różniczkowego (7) przy założeniu podziału brzegu L zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara jest następujące równanie całkowe [Brebbia i in. 1984, Pozrikidis 1992, Teleszewski i Sorko 2011]:

$$\frac{1}{2} v_w(\mathbf{p}) + \int_{(L)} g_w(\mathbf{q}) K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q = \int_{(L)} v_w(\mathbf{q}) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q \quad (9)$$

gdzie:

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r_{pq}} \right) \quad ; \quad r_{pq} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}| \quad ; \quad (\mathbf{p}) \in L, (\mathbf{q}) \in L \quad (9a)$$

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x_{\mathbf{p}} - x_{\mathbf{q}})n_x + (y_{\mathbf{p}} - y_{\mathbf{q}})n_y}{r_{\mathbf{pq}}^2} ; \quad (\mathbf{p}) \in L, (\mathbf{q}) \in L \quad (9b)$$

$$\left[n_x, n_y \right] = \left[\frac{\delta y_{\mathbf{q}}}{\delta L_{\mathbf{q}}}, -\frac{\delta x_{\mathbf{q}}}{\delta L_{\mathbf{q}}} \right]$$

gdzie: n_x oraz n_y są to wersory normalnej do brzegu (L).

Po wyznaczeniu gęstości $g_w(\mathbf{q})$ na linii brzegowej (L), prędkość v_z w dowolnym punkcie obszaru (Λ) wyznacza się z zależności:

$$v_z(\mathbf{p}) = - \int_{(L)} g_w(\mathbf{q}) K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q + \int_{(L)} v_w(\mathbf{q}) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q + v_\infty(\mathbf{p}) \quad (10)$$

$$(\mathbf{p}) \in \Lambda ; (\mathbf{q}) \in L$$

Zagadnienie brzegowe dla równania różniczkowego (6) formułuje się w postaci złożonego warunku brzegowego Dirichleta i Neumanna zakładającego znane wartości temperatury $\tilde{T}(\mathbf{q})$ (H1) na części brzegu L_T ($\mathbf{q} \in L_T$) i znane wartości strumienia ciepła $\tilde{q}(\mathbf{q})$ (H2) na części brzegu L_q ($\mathbf{q} \in L_q$) (rys. 1). Wyznaczone pole $v_z(\mathbf{p})$ w obszarze (Λ) uwzględnia się w równaniu (6), którego rozwiązaniem jest następujące równanie całkowe:

$$-\chi(\mathbf{p})T(\mathbf{p}) + \int_{(L_q)} q(\mathbf{q}) \mathbf{K}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q + \int_{(L_T)} T(\mathbf{q}) \mathbf{E}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_T =$$

$$= - \int_{(L_T)} \tilde{q}(\mathbf{q}) \mathbf{K}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_T - \int_{(L_q)} \tilde{T}(\mathbf{q}) \mathbf{E}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q + \rho c_p \iint_{\Lambda} v_z(\mathbf{w}) \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{K}(\mathbf{w}, \mathbf{q}) d\Lambda^1$$

$$(\mathbf{p}), (\mathbf{q}) \in L ; (\mathbf{w}) \in \Lambda$$

gdzie dla brzegu gładkiego $\chi(\mathbf{p})=1/2$ oraz:

$$\mathbf{K}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \left(\frac{1}{r_{\mathbf{pq}}} \right) ; \quad r_{\mathbf{pq}} = \sqrt{(x_{\mathbf{p}} - x_{\mathbf{q}})^2 + (y_{\mathbf{p}} - y_{\mathbf{q}})^2} , \quad (11a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x_{\mathbf{p}} - x_{\mathbf{q}})n_x + (y_{\mathbf{p}} - y_{\mathbf{q}})n_y}{r_{\mathbf{pq}}^2} , \quad (11b)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{w}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \left(\frac{1}{r_{\mathbf{wq}}} \right) ; \quad r_{\mathbf{wq}} = \sqrt{(x_{\mathbf{w}} - x_{\mathbf{q}})^2 + (y_{\mathbf{w}} - y_{\mathbf{q}})^2} . \quad (11c)$$

Po wyznaczeniu $T(\mathbf{p})$ oraz $q(\mathbf{p})$ temperaturę w dowolnym punkcie ($\mathbf{p} \in \Lambda$) rozpatrywanego obszaru (Λ) wyznacza się ze związku całkowego:

$$T(\mathbf{p}) = \int_{(L)} T(\mathbf{q}) \mathbf{E}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q + \int_{(L)} q(\mathbf{q}) \mathbf{K}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q - \rho c_p \iint_{\Lambda} v_z(\mathbf{p}) \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{K}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d\Lambda, \quad (12)$$

$$(\mathbf{q}) \in L; (\mathbf{p}) \in \Lambda$$

WERYFIKACJA METODY MEB

W celu określenia błędu metody MEB porównano rezultaty obliczeń numerycznych z rozwiązaniem analitycznym. Rozwiązanie teoretyczne pola temperatury w przewodzie okrągłym przy założeniu stałego osiowego strumienia ciepła i stałej temperatury obwodowej, opisane jest następującym wzorem [White 2005]:

$$T_{TEO}(r) = T_s - \frac{\rho C_p v_{sr} R^2}{8\lambda} \frac{\partial T_s}{\partial x} \left(3 - \frac{4r^2}{R^2} + \frac{r^4}{R^4} \right) \quad (13)$$

$$v_{sr} = \frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dz} \quad ; \quad Re = \frac{v_{sr} 2R}{\nu}$$

gdzie: v_{sr} jest to prędkość średnia w przewodzie kołowym, natomiast $R=0,01$ [m] oznacza promień przewodu, ν jest współczynnikiem lepkości kinematycznej, Re to liczba Reynoldsa, $T_s=20,0^\circ\text{C}$ jest zadaną temperaturą ścianki przewodu, $\partial T_s / \partial x = 1,0$ jest stałym osiowym gradientem temperatury.

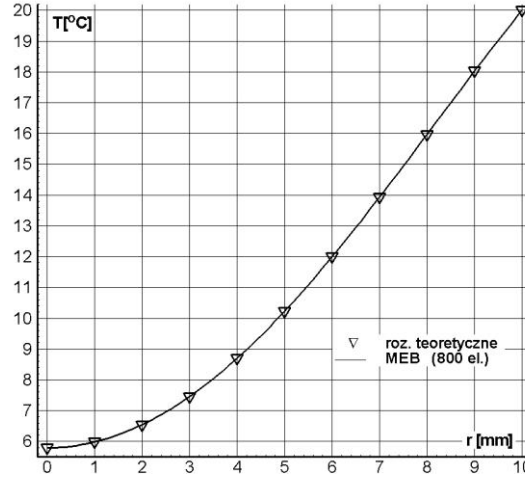
Do obliczeń przyjęto przepływ glikolu etylenowego o parametrach: $\rho = 1115,6 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0,000019 \text{ m}^2/\text{s}$, $C_p = 2403,0 \text{ J}/(\text{kgK})$, $\lambda = 0,2705 \text{ W}/(\text{mK})$ Względne błędy obliczeń MEB poszczególnych temperatur wyznaczono według formuły:

$$\delta T_{MEB} = \left| \frac{T_{TEO} - T_{MEB}}{T_{TEO}} \right| \cdot 100\% \quad (14)$$

gdzie: T_{TEO} jest to rozwiązanie teoretyczne (13), natomiast T_{MEB} jest rozwiązaniem metody elementów brzegowych.

Maksymalny błąd metody elementów brzegowych nie przekracza wartości 0,05% w przypadku brzegu L składającego się z 400 elementów i 0,025% w przypadku brzegu zbudowanego z 800 elementów. Na rysunku 2 przedstawiono

graficzne porównanie rezultatów numerycznych MEB z rozwiązaniem teoretycznym (13).



Rys. 2. Porównanie rezultatów obliczeń MEB z rozwiązaniem teoretycznym (13)
Fig. 2. Compare BEM results with theoretical solution (13)

PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

Poniżej przedstawiono przykład obliczeniowy wykorzystania metody elementów brzegowych do wyznaczenia zależności liczby Nusselta Nu w funkcji liczby boków n przekroju poprzecznego przewodów w kształcie wielokątów foremnych. Liczba Nusselta została wyznaczona z następującego wzoru:

$$Nu = \frac{q_w D_h}{\lambda (T_s - T_m)} \quad (15)$$

$$D_h = \frac{4\Lambda}{L} ; T_m = \frac{1}{\Lambda v_{sr}} \int_{\Lambda} v T d\Lambda ; v_{sr} = \frac{1}{\Lambda} \int_{\Lambda} v d\Lambda \quad (15a)$$

gdzie: D_h jest średnicą hydrauliczną, natomiast T_m jest średnią temperaturą masywną płynu.

W pracy wykonano szereg symulacji dla przekrojów poprzecznych przewodów o kształcie wielokąta foremnego w zakresie liczby boków n od 3 do 30 oraz o kształcie okręgu. Po określeniu liczb Nusselta dla każdego kształtu przekroju przewodu, stosując aproksymację wyników Nu dla warunku H1 i H2 otrzymano następujące wzory opisujące zależność liczby Nusselta od liczby boków n przekroju poprzecznego przewodu o przekroju wielokąta foremnego:

$$Nu_{H1[MEB]} = 4.364 - \frac{0.008}{n} - \frac{14.525}{n^2} + \frac{9.819}{n^3} \quad (16)$$

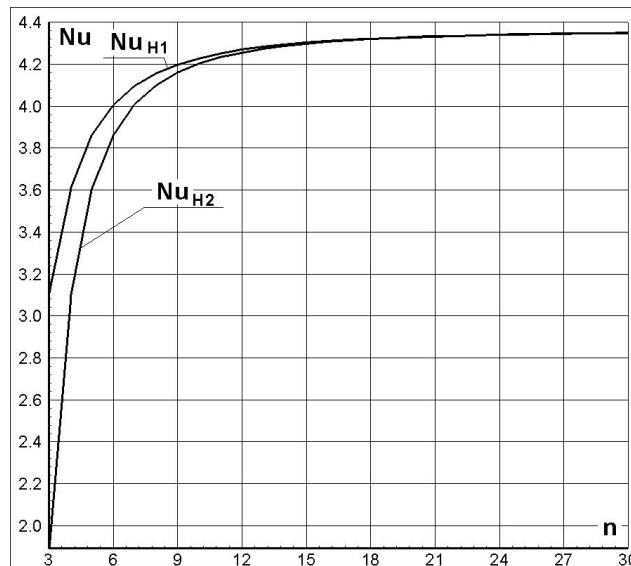
oraz

$$Nu_{H2[MEB]} = 4.364 + \frac{0.159}{n} - \frac{18.115}{n^2} + \frac{18.877}{n^3} - \frac{192.554}{n^4} + \frac{283.3}{n^5} \quad (17)$$

Rezultaty obliczeń MEB zostały porównane ze znanymi rezultatami obliczeń pracy [Cheng 1966, 1969] w tabeli 1. Błędy $\delta Nu_{H1[MEB]}$ i $\delta Nu_{H2[MEB]}$ zostały wyznaczone ze wzoru:

$$\delta Nu_{Hi[MEB]} = \left| \frac{Nu_{Hi[Cheng]} - Nu_{Hi[MEB]}}{Nu_{Hi[Cheng]}} \right| \cdot 100\% \quad ; \quad i = 1, 2 \quad (18)$$

Na rysunku 3 wykreślono zależności liczby Nu w funkcji liczby boków wielokąta foremnego przekroju kanału dla warunku H1 i H2.



Rys. 3. Wartości liczb Nusselta Nu_{H1} i Nu_{H2} w funkcji liczby ścianek przewodu o przekroju wielokąta foremnego w laminarnym przepływie przez przewód, rozwiązanie (16-17)

Fig. 3. Regular (n -sided) polygonal ducts: Nu_{H1} and Nu_{H2} , solutions (16-17) for fully developed laminar flow

Tab. 1. Porównanie wyznaczonej zależności liczby Nusselta Nu_{H1} (16) i Nu_{H2} (17) w funkcji liczby ścian wielokąta foremego tworzącego przekrój przewodu prostoosiowego ze znanymi rozwiązaniami [Cheng 1966, 1969]

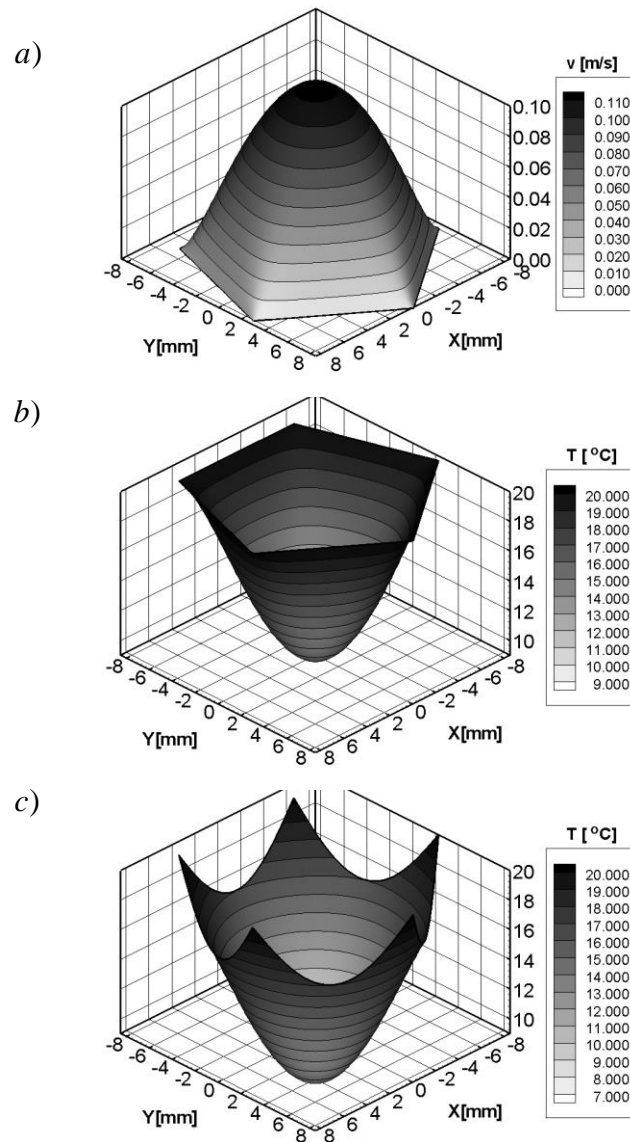
Tab. 1. Compare Nusselt Nu_{H1} (16) i Nu_{H2} (17) results with Cheng solutions [Cheng 1966, 1969]

n	Nu_{H1} [Cheng]	Nu_{H1} [MEB]	δNu_{H1} [MEB]	Nu_{H2} [Cheng]	Nu_{H2} [MEB]	δNu_{H2} [MEB]
-	-	-	%	-	-	%
3	3,111	3,111	0,000	1,892	1,892	0,000
4	3,608	3,608	0,000	3,091	3,091	0,000
5	3,859	3,860	0,026	3,605	3,605	0,000
6	4,002	4,005	0,075	3,862	3,863	0,026
7	4,102	4,095	0,171	4,009	4,009	0,000
8	4,153	4,155	0,048	4,100	4,099	0,024
9	4,196	4,197	0,024	4,159	4,159	0,000
10	4,227	4,228	0,024	4,201	4,201	0,000
11	-	4,251	-	-	4,232	-
12	-	4,268	-	-	4,254	-
13	-	4,282	-	-	4,272	-
14	-	4,293	-	-	4,285	-
15	-	4,302	-	-	4,296	-
20	4,329	4,329	0,000	4,328	4,328	0,000
25	-	4,341	-	-	4,342	-
30	-	4,348	-	-	4,350	-
10^{50}	4,364	4,364	0,000	4,364	4,364	0,000

Wzory (16) i (17) mogą być użyte w aplikacjach do prognozowania liczby Nussleta w kanałach o przekroju wielokąta foremego z maksymalnym błędem 0,20% dla Nu_{H1} i 0,03% dla Nu_{H2} .

Poniżej przedstawiono graficzne rezultaty obliczeń MEB dla przewodu pięciokątnego przez który przepływa glikol etylenowy o parametrach $\rho = 1115,6 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0,000019 \text{ m}^2/\text{s}$, $C_p = 2403,0 \text{ J/(kgK)}$, $\lambda = 0,2705 \text{ W/(mK)}$. Obliczenia wykonano dla warunku H1, w którym założono temperaturę na ścianie kanału $T_s = 20^\circ\text{C}$ oraz dla warunku H2 przy założeniu stałej gęstości strumienia ciepła $q_w = 512.535 \text{ W/m}^2$. Symulacje przeprowadzono dla liczby $Re = 40$.

Na rysunku 4a przedstawiono pole prędkości w kanale pięciokątnym. Rysunek 4b przedstawia pole temperatury dla przyjętego warunku H1, natomiast rysunek 4c pole temperatury dla warunku H2.



Rys. 4. Przepływ przewodzie pięciokątnym (glikol etylenowy, $Re=40$) – rezultaty obliczeń MEB: a) pole prędkości, b) pole temperatury (warunek H1, $Nu_{H1}=3,860$), c) pole temperatury (warunek H2, $Nu_{H2}=3,605$)

Fig. 4. Flow in pentagon duct (ethylene glycol, $Re=40$) - BEM solution: a) velocity field, b) temperature field (H1 condition's, $Nu_{H1}=3,860$), c) temperature field (H2 condition's, $Nu_{H2}=3,605$)

Wnioski

Przedstawiony w pracy algorytm metody elementów brzegowych stanowi efektywne narzędzie do badań konwekcji wymuszonej płynu w przewodach prostoosiowych niezależnie od kształtu przekroju przewodu. Główną zaletą prezentowanej metody jest eliminacja pracochłonnych przestrzennych siatek stosowanych w klasycznych siatkowych metodach numerycznych. Prezentowana metoda MEB charakteryzuje się dużą dokładnością.

W publikacji przedstawiono praktyczny przykład zastosowania metody do określenia zależności liczby Nussleta dla dwóch warunków H1 i H2 od liczby ścian tworzących przewód prostoosiowy o przekroju wielokąta foremnego.

Prezentowana metoda może być również stosowana w przepływach w mikrokanałach, tam gdzie przepływy te są zgodne z makroprzepływami.

Opracowanie zrealizowano w ramach pracy statutowej
nr S/WBiIS/4/2014 Katedry Ciepłownictwa Politechniki Białostockiej

LITERATURA

1. CLARK M. M.; 2000. Transport Modeling for Environmental Engineers and Scientists Second Edition. John Wiley&Sons.
2. KAKAC S., LIU H.; 2002. Heat exchangers selection, rating, and thermal design, Second Edition, CRC Press 2002.
3. SHAH R.K., LONDON A.L.; 1978. Laminar Flow Forced Convection in Ducts A Source Book for Compact Heat Exchanger Analytical Data. Academic Press
4. RAY S., MISRA D.; 2010. Laminar fully developed flow through square and equilateral triangular ducts with rounded corners subjected to H1 and H2 boundary conditions. International Journal of Thermal Sciences 49, 1763-1775
5. SADASIVAM R., MANGLIK R.M, JOG M. A.; 1999. Fully developed forced convection through trapezoidal and hexagonal ducts. International Journal of Heat and Mass Transfer 42, 4321-4331
6. BATCHELOR G.K.; 2000. An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press
7. WHITE F.; 2005. Viscous Fluid Flow. McGraw-Hill Mechanical Eng.
8. TELESZEWSKI T.J., SORKO S.A.; 2012. Wyznaczanie współczynnika Boussinesqa w przepływie laminarnym w prostoosiowych przewodach o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego metodą elementów brzegowych. Symulacja w Badaniach i Rozwoju, Vol. 3, No. 2, 115-128

9. TELESZEWSKI T.J.; 2012. Algorytm wyznaczania współczynnika Coriolisa przepływów laminarnych w kanałach prostokątnych metodą elementów brzegowych. Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej Nr 283 Budownictwo i Inżynieria Środowiska z. 59, Nr 4, 131-141
10. BREBBIA C.A., TELLES J.F.C., WROBEL L.C.; 1984. Boundary element Techniques Theory and Applications in Engineering. Springer-Verlag. NY.
11. POZRIKIDIS C.; 1992. Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow. Cambridge University Press
12. TELESZEWSKI T.J., SORKO S.A.; 2011. Zastosowanie metody elementów brzegowych do wyznaczania jednokierunkowego przepływu w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego. Acta Mechanica et Automatica Vol.5, Nr 3, 124-132
13. CHENG K.C.; 1966. Laminar flow and heat transfer characteristics in regular polygonal ducts. Proc. Int. Heat Transfer Conf., 3rd, AIChE, New York, 64-76
14. CHENG K.C.; 1969. Laminar forced convection in regular polygonal ducts with uniform peripheral heat flux. J. Heat Transfer 91, 156-157

BOUNDARY ELEMENTS METHOD SIMULATION OF LAMINAR FLOW FORCED CONVECTION IN DUCT

S u m m a r y

The paper presents the numerical algorithm Boundary Element Method to simulation modelling forced convection in a duct. The efficiency and the credibility of proposed algorithm were verified by numerical tests in theoretical solution. A numerical examples are presented fully developed forced convection through pentagon duct. In this study is proposed for determining the Nusselt number in regular polygonal channels.

Key words: forced convection, flow in ducts, Nusselt number, boundary element method (BEM)